Analiza Funkcjonalna

Bartosz Kwaśniewski

Faculty of Mathematics, University of Białystok

Wykład 2

Przestrzenie funkcji ciągłych

math.uwb.edu.pl/∼zaf/kwasniewski/pdf/skrypt.pdf

Przestrzenie funkcji ciągłych

Niech Ω będzie ustaloną przestrzenią topologiczną.

Przestrzeń funkcji ciągłych $C(\Omega) := \{x : \Omega \to \mathbb{F} \text{ funkcja ciągła}\}$ o wartościach w ciele $\mathbb{F} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ wraz z działaniami

$$(x+y)(t) := x(t)+y(t), \qquad (\lambda x)(t) := \lambda x(t) \quad \left(\begin{array}{c}\text{działania}\\ \text{określone}\\ \text{punktowo!}\end{array}\right)$$

gdzie $x, y \in C(\Omega)$, $\lambda \in \mathbb{F}$, jest przestrzenią liniową nad $\mathbb{F}$.

Przestrzeń funkcji ciągłych i ograniczonych

$$C_b(\Omega) := \{x \in C(\Omega) : \exists_M \forall_{t\in\Omega} |x(t)| < M\}$$
$$= \{x \in C(\Omega) : \sup_{t\in\Omega} |x(t)| < \infty\}$$

jest podprzestrzenią liniową przestrzeni $C(\Omega)$, na której określona jest **norma supremum**

$$\|x\|_\infty := \sup_{t\in\Omega} |x(t)|.$$

Fakt. Zbieżność w normie $\|\cdot\|_\infty$ $\equiv$ **zbieżność jednostajna**

$$\begin{aligned}
x_n \xrightarrow{\|\cdot\|_\infty} x \iff & \lim_{n\to\infty} \|x_n - x\|_\infty = 0 \\
\iff & \lim_{n\to\infty} \sup_{t\in\Omega} |x_n(t) - x(t)| = 0 \\
\iff & \forall_{\varepsilon>0}\, \exists_{N\in\mathbb{N}}\, \forall_{n>N}\, \sup_{t\in\Omega} |x_n(t) - x(t)| < \varepsilon \\
\iff & \forall_{\varepsilon>0}\, \exists_{N\in\mathbb{N}}\, \forall_{n>N}\, \forall_{t\in\Omega}\, |x_n(t) - x(t)| < \varepsilon \\
\overset{def}{\iff} & x_n \rightrightarrows x
\end{aligned}$$

gdzie symbol $\rightrightarrows$ oznacza zbieżność jednostajną.

Prz. Ciąg $x_n(t) = t^n$ funkcji na $[0, 1]$ jest zbieżny punktowo do $x(t) = \begin{cases} 0, & t < 1 \\ 1, & t = 1 \end{cases}$. Ale $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ nie jest zbieżny w normie $\|\cdot\|_\infty$.

Ciąg funkcji ciągłych, jeżeli jest zbieżny jednostajnie, to musi być zbieżny do funkcji ciągłej!

Stw. $C_b(\Omega)$ z normą $\|x\|_\infty = \sup\limits_{t\in\Omega} |x(t)|$ jest przestrzenią Banacha.

Dowód: Niech $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq C_b(\Omega)$ ciąg Cauchy. Dla każdego $t \in \Omega$

$\mathbb{F}$.

Stw. $C_b(\Omega)$ z normą $\|x\|_\infty = \sup_{t\in\Omega} |x(t)|$ jest przestrzenią Banacha.

Dowód: Niech $\{x_n\}_{n=1}^\infty \subseteq C_b(\Omega)$ ciąg Cauchy. Dla każdego $t \in \Omega$

$$|x_n(t) - x_m(t)| \leqslant \sup_{s\in\Omega} |x_n(s) - x_m(s)| = \|x_n - x_m\|_\infty \xrightarrow{n,m\to\infty} 0.$$

Czyli ciąg liczbowy $\{x_n(t)\}_{n=1}^\infty$ jest ciągiem Cauchy w ciele $\mathbb{F}$. Skoro $\mathbb{F}$ zupełne, to istnieje $x(t) \in \mathbb{F}$ takie, że $x_n(t) \to x(t)$ w $\mathbb{F}$. W ten sposób otrzymujemy funkcję liczbową $\Omega \ni t \mapsto x(t) \in \mathbb{F}$, która jest „kandydatem na granicę" ciągu $\{x_n\}_{n=1}^\infty$. Dla każdego $t \in \Omega$ mamy

$$|x_n(t) - x(t)| = \lim_{m\to\infty} |x_n(t) - x_m(t)| \leqslant \limsup_{m\to\infty} \|x_n - x_m\|_\infty.$$

Zatem

$$\lim_{n\to\infty} \|x_n - x\|_\infty = \lim_{n\to\infty} \sup_{t\in\Omega} |x_n(t) - x(t)| \leqslant \lim_{n\to\infty} \limsup_{m\to\infty} \|x_n - x_m\|_\infty \overset{\{x_n\}_{n=1}^\infty \text{ jest Cauchy}}{=} 0.$$

Stąd $x_n \xrightarrow{\|\cdot\|_\infty} x$. Granica jednostajna ciągu funkcji ciągłych jest ciągła. Czyli $x \in C(\Omega)$. Co więcej, funkcja x jest ograniczona, bo

$$\|x\|_\infty \leqslant \|x - x_n\|_\infty + \|x_n\|_\infty < \infty. \quad \text{Czyli } x \in C_b(\Omega). \blacksquare$$

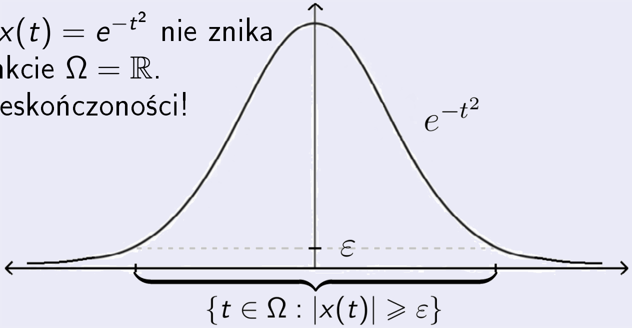
Funkcja ciągła na zbiorze zwartym osiąga swoje kresy!

Wn. Jeśli Ω zwarta, to $C(\Omega) = C_b(\Omega)$ oraz $\|x\|_\infty = \max_{t\in\Omega} |x(t)|$ (funkcja $|x(t)|$ osiąga swoje maksimum, w szczególności jest ograniczona)

Przestrzeń funkcji ciągłych znikających w nieskończoności

$$C_0(\Omega) := \left\{ x \in C(\Omega) : \forall_{\varepsilon>0}\ \{t \in \Omega : |x(t)| \geqslant \varepsilon\} \text{ zbiór zwarty} \right\}$$

Prz. Funkcja $x(t) = e^{-t^2}$ nie znika w żadnym punkcie $\Omega = \mathbb{R}$.
Ale znika w nieskończoności!



Uw. Jeśli Ω przestrzeń zwarta, to $C_0(\Omega) = C(\Omega) = C_b(\Omega)$.

Stw. $C_0(\Omega)$ jest domkniętą podprzestrzenią przestrzeni Banacha $(C_b(\Omega), \|\cdot\|_\infty)$. Zatem $(C_0(\Omega), \|\cdot\|_\infty)$ jest przestrzenią Banacha.

Dowód: Niech $x, y \in C_0(\Omega)$ i $\varepsilon > 0$. Zauważmy, że

$$\underbrace{\{t : |x(t) + y(t)| \geqslant \varepsilon\}}_{\text{domknięty}} \subseteq \underbrace{\{t : |x(t)| \geqslant \varepsilon/2\} \cup \{t : |y(t)| \geqslant \varepsilon/2\}}_{\text{zbiór zwarty, jako suma dwóch zwartych}}.$$

Zatem $\{t : |x(t) + y(t)| \geqslant \varepsilon\}$ zwarty, jako domknięty podzbiór zbioru zwartego. Czyli $x + y \in C_0(\Omega)$. Dla $\lambda \in \mathbb{F}$ zbiór $\{t : |\lambda x(t)| \geqslant \varepsilon\} = \{t : |x(t)| \geqslant \frac{\varepsilon}{|\lambda|}\}$ zwarty, więc $\lambda x \in C_0(\Omega)$. Ponadto, $\|x\|_\infty = \max_{t\in\Omega} |x(t)| < \infty$, bo $|x(t)|$ ciągła na zbiorze zwartym $\{t : |x(t)| \geqslant \varepsilon\}$. Zatem $C_0(\Omega) \subseteq C_b(\Omega)$ podprzestrzeń.

„Domkniętość”: Niech $\{x_n\}_{n=1}^\infty \subseteq C_0(\Omega)$ ciąg zbieżny do pewnego $x \in C_b(\Omega)$. Dla dużych $n \in \mathbb{N}$ mamy $\|x_n - x\|_\infty < \frac{\varepsilon}{2}$ i wtedy

$$\{t : |x(t)| \geqslant \varepsilon\} \subseteq \{t : |x_n(t)| \geqslant \varepsilon/2\}.$$

Stąd $\{t : |x(t)| \geqslant \varepsilon\}$ zwarty, jako domknięty podzbiór zbioru zwartego. Zatem $x \in C_0(\Omega)$. ■

Na przestrzeni dyskretnej wszystkie funkcje są ciągłe! Ciągi to funkcje na zbiorze $\mathbb{N}$!

Wn. Jeśli $\Omega = \mathbb{N}$ jest przestrzenią dyskretną, to $C_b(\Omega)$ można utożsamić z **przestrzenią ciągów ograniczonych**:

$$\ell^\infty := \{x = (x(1), x(2), \ldots) : \sup_{k\in\mathbb{N}} |x(k)| < \infty\}$$

wyposażoną w normę $\|x\|_\infty := \sup_{k\in\mathbb{N}} |x(k)|$. Natomiast $C_0(\Omega)$ można utożsamić z **przestrzenią ciągów zbieżnych do zera**:

$$c_0 := \{x = (x(1), x(2), \ldots) : \lim_{k\to\infty} x(k) = 0\}.$$

Dowód: Znikanie w nieskończoności funkcji $x : \mathbb{N} \to \mathbb{F}$ jest równoważne temu, że ciąg $\{x(k)\}_{k=1}^\infty$ zbiega do zera:

w przestrzeni dyskretnej

$$x \in C_0(\mathbb{N}) \iff \forall_{\varepsilon>0}\ \{k \in \mathbb{N} : |x(k)| \geqslant \varepsilon\} \text{ zwarty} = \text{skończony}$$

$$\iff \forall_{\varepsilon>0}\ \exists_{N\in\mathbb{N}} \forall_{k>N} |x(k)| < \varepsilon \iff x \in c_0.$$

Rozzważmy również **przestrzeń ciągów zbieżnych**:

$$c := \{x = (x(1), x(2), \dots) : \exists_{x(\infty)\in\mathbb{F}} \lim_{k\to\infty} x(k) = x(\infty)\}.$$

Jako że ciągi zbieżne są ograniczone oraz granica zachowuje kombinacje liniowe, to c jest podprzestrzenią liniową ℓ^∞. Ponadto c jest domknięta w ℓ^∞. Aby to udowodnić, trzeba pokazać, że „*ciąg zbieżny ciągów zbieżnych jest zbieżny do ciągu zbieżnego*”

Wn. Mamy następujące przestrzenie Banacha

$$c_0 \subseteq c \subseteq \ell^\infty$$

z normą $\|x\|_\infty := \sup_{k\in\mathbb{N}} |x(k)|$.

Nośnikiem funkcji $x : \Omega \to \mathbb{F}$ nazywamy zbiór domknięty

$$\operatorname{supp}(x) := \overline{\{t \in \Omega : x(t) \neq 0\}}.$$

Prz. Jeśli $\Omega = \mathbb{R}$ oraz $x = \mathbb{1}_{\mathbb{Q}}$, to $\operatorname{supp}(x) = \Omega$.

Lem. Przestrzeń funkcji ciągłych o zwartych nośnikach

$$C_c(\Omega) := \{x \in C(\Omega) : \operatorname{supp}(x) \text{ jest zbiorem zwartym}\}$$

jest podprzestrzenią liniową przestrzeni Banacha $C_0(\Omega)$.

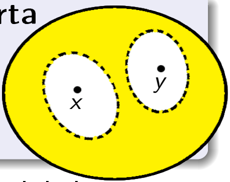
Dowód: $C_c(\Omega) \subseteq C_0(\Omega)$, gdyż $\{t \in \Omega : |x(t)| \geqslant \varepsilon\} \subseteq \operatorname{supp}(x)$ oraz domknięty podzbiór zbioru zwartego jest zwarty. Ponadto $\operatorname{supp}(\lambda x) = \operatorname{supp}(x)$ dla $\lambda \neq 0$ oraz

$$\operatorname{supp}(x + y) \subseteq \operatorname{supp}(x) \cup \operatorname{supp}(y).$$

Stąd wynika, że $C_c(\Omega)$ jest przestrzenią liniową. ■

Def. Przestrzeń topologiczna Ω jest **lokalnie zwarta** jeśli każdy punkt w Ω ma otoczenie zwarte

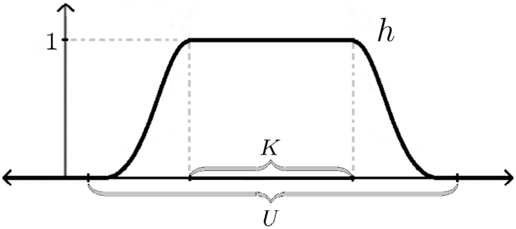
Ω jest przestrzenią **Hausdorffa** jeśli każde dwa różne punkty mają rozłączne otoczenia.



Prz. Każdy otwarty lub domknięty podzbiór $\mathbb{R}^n$ jest lokalnie zwarty. Każda przestrzeń metryczna jest Hausdorffa.

Tw. (Lemat Urysohna). Ω lokalnie zwarta przestrzeń Hausdorffa

Jeśli $K \subseteq U \subseteq \Omega$, gdzie K zwarty i U otwarty, to istnieje funkcja ciągła $h : \Omega \to [0, 1]$ ze zwartym nośnikiem zawartym w U oraz przyjmująca wartość 1 na K: $\operatorname{supp}(h) \subseteq U$ oraz $h|_K \equiv 1$.



Wn. Jeśli Ω lokalnie zwarta Hausdorffa, to $\overline{C_c(\Omega)} = C_0(\Omega)$. Zatem $C_0(\Omega)$ **jest uzupełnieniem** $C_c(\Omega)$ w normie supremum.

Dowód: Niech $x \in C_0(\Omega)$. Dla każdego n połóżmy

$$K_n := \{t : |x(t)| \geqslant 1/n\}, \qquad U_n := \{t : |x(t)| > 1/(n+1)\}.$$

Wtedy K_n zwarty, U_n otwarty oraz $K_n \subseteq U_n$. Na mocy **Lematu Urysohna** istnieje $h_n \in C_c(\Omega)$ taka, że $0 \leqslant h \leqslant 1$, $h_n|_{K_n} = 1$ oraz $\operatorname{supp}(h_n) \subseteq U_n$. Kładąc $x_n := x \cdot h_n$ mamy $x_n \in C_c(\Omega)$ oraz

$$\|x_n - x\|_\infty = \sup_{t\in\Omega} |x(t)h(t) - x(t)| = \sup_{t\in\Omega\setminus K_n} |x(t)h(t) - x(t)| \leqslant 2/n.$$

Zatem $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq C_c(\Omega)$ zbiega do $x \in C_0(\Omega)$. ∎

Prz. Dla przestrzeni dyskretnej $\Omega = \mathbb{N}$ przestrzeń funkcji $C_c(\Omega)$ możemy utożsamić z **przestrzenią ciągów skończonych**:

$$c_{00} = \{x = (x(1), x(2), ..., x(N), 0, 0, ...) : N \in \mathbb{N}, x(k) \in \mathbb{F}\}.$$

W szczególności, c_{00} jest gęstą podprzestrzenią przestrzeni c_0.

Podsumowanie (ściągawka)

$C(\Omega)$ - przestrzeń funkcji ciągłych (przestrzeń liniowa)

$C_b(\Omega)$ - przestrzeń funkcji ciągłych i ograniczonych

$C_0(\Omega)$ - przestrzeń funkcji ciągłych i znikających w ∞

przestrzenie Banacha z normą $\|x\|_\infty = \sup_{t\in\Omega} |x(t)|$

$C_c(\Omega)$ - przestrzeń funkcji ciągłych o zwartych nośnikach

$$C_c(\Omega) \subseteq C_0(\Omega) \subseteq C_b(\Omega) \subseteq C(\Omega)$$

$$\Omega \text{ zwarta} \iff C_c(\Omega) = C_0(\Omega) = C_b(\Omega) = C(\Omega)$$

$$\Omega \text{ lokalnie zwarta Hausdorffa} \implies \overline{C_c(\Omega)}^{\|\cdot\|_\infty} = C_0(\Omega)$$

ℓ^∞ - przestrzeń ciągów ograniczonych

c - przestrzeń ciągów zbieżnych

c_0 - przestrzeń ciągów zbieżnych do zera

przestrzenie Banacha z normą $\|x\|_\infty = \sup_{k\in\mathbb{N}} |x(k)|$

c_{00} - przestrzeń ciągów skończonych (niezupełna)

$$c_{00} \subseteq c_0 = \overline{c_{00}}^{\|\cdot\|_\infty} \subseteq c \subseteq \ell^\infty$$